

1 Logarithme d'un langage

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini et $L \subseteq \mathcal{A}^*$ un langage. On définit le logarithme de L :

$$LOG(L) = \{u \in \mathcal{A}^* \mid \exists v \in \mathcal{A}^*, |v| = 2^{|u|} \text{ et } uv \in L\}$$

L'objectif est de montrer que si L est régulier, alors $LOG(L)$ aussi.

Soit $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, Q, i, F, \delta)$ un automate fini déterministe reconnaissant L . On pose $\mathcal{G} = (\mathcal{P}(Q))^Q$. On définit, pour $g, h \in \mathcal{G}$, l'opération :

$$g \circ h = q \mapsto \bigcup_{q' \in h(q)} g(q')$$

On pose $g_0 \in \mathcal{G}$ la fonction $g_0 : q \mapsto \{\delta(q, a) \mid a \in \mathcal{A}\}$.

On définit enfin l'automate déterministe $\mathfrak{B}$:

- l'alphabet est toujours $\mathcal{A}$;
- ses états sont $Q' = Q \times \mathcal{G}$;
- son état initial est $i' = (i, g_0)$;
- la fonction de transition est $\Delta : ((q, g), a) \mapsto (\delta(q, a), g \circ g)$;
- les états finaux sont $F' = \{(q, g) \mid F \cap g(q) \neq \emptyset\}$.

Exercice 1

Donner la définition « en français » de $\mathcal{G}$, puis déterminer son cardinal.

Exercice 2

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété suivante :

$$P(n) : \forall x \in \mathcal{A}^n, \Delta^*(i', x) = (q, g) \iff \delta^*(i, x) = q \text{ et } \forall r \in Q, g(r) = \{s \in Q \mid \exists m \in \mathcal{A}^{2^n}, \delta^*(r, m) = s\}$$

Moins formellement, $\Delta^*(i', x)$ renvoie $\delta^*(i, x)$ ainsi que la fonction qui, à un état, associe les états atteignables après lecture d'un mot de longueur $2^{|x|}$.

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$.

On pourra utiliser la notation $\delta^*(r, \mathcal{A}^K) = \{s \in Q \mid \exists m \in \mathcal{A}^K, \delta^*(r, m) = s\}$ pour $K \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Montrer que $\mathfrak{B}$ reconnaît $LOG(L)$.

2 Généralisation à d'autres fonctions

De manière générale, pour $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ et un langage L , on définit :

$$PAD_f(L) = \{u \in \mathcal{A}^* \mid \exists v \in \mathcal{A}^*, |v| = f(|u|) \text{ et } uv \in L\}$$

On note alors $FP = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall L \subseteq \mathcal{A}^*, L \text{ rationnel} \implies PAD_f(L) \text{ rationnel}\}$: ce sont les fonctions qui préservent la rationalité des langages par l'opération de remplissage PAD .

Exercice 4

1. Justifier que $e : n \mapsto 2^n \in FP$.
2. Montrer que $id_{\mathbb{N}} : n \mapsto n \in FP$.
3. Montrer que $c : n \mapsto n^2 \in FP$.
Indication : on posera $Q' = Q \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, et on remarquera que $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
4. Justifier succinctement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : n \mapsto n^k \in FP$.
5. Montrer que $fibo : n \mapsto fibo(n) \in FP$ (avec $fibo(0) = 0$, $fibo(1) = 1$ et $fibo(n+2) = fibo(n+1) + fibo(n)$).
6. Justifier que $FP \neq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

3 Considérations algorithmiques

Exercice 5

Soit $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, Q, i, F, \delta)$ un automate fini.

1. Donner la taille d'un automate $\mathfrak{B}$ reconnaissant $LOG(\mathcal{L}(\mathfrak{A}))$.
2. Proposer un algorithme en pseudo-code permettant de construire $\mathfrak{B}$ à partir de $\mathfrak{A}$.
3. Établir la complexité temporelle de votre algorithme.