Langages réguliers unaires

Travail 01

L'objectif est d'étudier les langages réguliers dans le cas où $|\mathcal{A}| = 1$, et de montrer plus précisément le résultat suivant :

Théorème 1

Soit $\mathcal{A} = \{a\}$. Les langages réguliers sur $\mathcal{A}$ sont exactement les langages de la forme

$$\{a^n \mid n \in A\}$$

où A est une union finie de progressions arithmétiques.

Partie 1 : progressions arithmétiques

Une progression arithmétique est un ensemble de la forme $p + q\mathbb{N}$, où $p, q \geqslant 0$ sont des entiers. On notera PA l'ensemble des progressions arithmétiques, et $UFPA$ l'ensemble des unions finies de progressions arithmétiques.

Exercice 1

1. Montrer que $\varnothing \in UFPA$.
2. Montrer que $\{0\}$ et $\{1\} \in UFPA$.
3. Montrer que si $X, Y \in UFPA$, alors $X \cup Y \in UFPA$.

Exercice 2

Pour deux ensembles $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, on note $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ (on fera attention à ne pas confondre avec l'addition sur les langages réguliers).

1. Soient $X = p + q\mathbb{N}$ et $Y = r + s\mathbb{N}$ deux progressions arithmétiques.
   a) Montrer que si $q = 0$, $X + Y \in PA$.
   b) Montrer que si $q > 0$, on a :
   $$p + q\mathbb{N} + r + s\mathbb{N} = \bigcup_{0 \leqslant i < q} ((p + r + is) + q\mathbb{N})$$
   c) En déduire que, dans tous les cas, $X + Y \in UFPA$.
2. Montrer que si $X, Y \in UFPA$, alors $X + Y \in UFPA$.

Exercice 3

Pour un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$, on note $E(X) = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in X \text{ pour tout } i\}$.

1. Montrer que pour tout $X \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in E(X)$.
2. Soit $X = p + q\mathbb{N}$ une progression arithmétique.
   a) Montrer que si $p = 0$, alors $E(X) \in PA$.
   b) Montrer que si $p > 0$, on a :
   $$E(X) = \{0\} \cup \bigcup_{0 \leqslant i < p} (p + iq + p\mathbb{N})$$
3. Montrer que pour $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $E(X \cup Y) = E(X) + E(Y)$.
4. En déduire que si $X \in UFPA$, alors $E(X) \in UFPA$.

Partie 2 : retour aux langages réguliers

Exercice 4

Soit $Q \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une famille de parties de $\mathbb{N}$: on suppose que Q contient $\emptyset$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et que Q est stable par les opérateurs $\cup, +$ et E.
Montrer que $UFPA \subseteq Q$.

Exercice 5

1. Montrer que la fonction $\phi : \mathcal{A}^* \to \mathbb{N}, m \mapsto |m|$ est un isomorphisme de monoïdes.
2. En déduire le théorème 1.

Exercice 6

1. Soit L un langage régulier sur un alphabet quelconque. Montrer que $|L| = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in L, |m| = n\} \in UFPA$.
2. En déduire que $L_R = \{a^{\lfloor n\sqrt{n} \rfloor} \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un langage régulier.