

Théorème de Fine-Wilf

Travail
01

Ce DM traite de l'étude de l'ensemble des périodes d'un mot.

Partie 1 : Cas des mots infinis

Pour un alphabet $\mathcal{A}$, un mot infini est un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Un entier $p \in \mathbb{N}$ est une période d'un mot infini x si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x_j = x_{j+p}$.

Exercice 1

1. Montrer que pour tout mot infini, 0 est une période.
2. Montrer que l'ensemble des périodes d'un mot infini est de la forme $p\mathbb{N}$, où $p \in \mathbb{N}$.

Partie 2 : Cas des mots finis

Pour un mot fini m , un entier $p \in \mathbb{N}$ est une période de m si pour tout $0 \leq j \leq |m| - p - 1$, $m_j = m_{j+p}$.

Exercice 2

1. Justifier que *abbabb* et *bamba* sont tous deux 3-périodiques.
2. Justifier que *oui* est 5-périodique.

Dans le cas des mots finis, l'équivalent du résultat évoqué dans la partie précédente est le théorème de Fine-Wilf, dont la démonstration est l'objectif de ce DM :

Théorème 1 : théorème de Fine-Wilf

Soit $m \in \mathcal{A}^*$ un mot, et p et q deux périodes de m . On suppose que $|m| \geq p + q - \text{PGCD}(p, q)$. Alors m admet aussi $\text{PGCD}(p, q)$ comme période.

Exercice 3

Démontrer le théorème de Fine-Wilf dans le cas où l'un de p ou de q est nul.

Exercice 4

Soit m un mot fini et p et q deux de ses périodes non nulles. On fait deux hypothèses supplémentaires :

- p et q sont premiers entre eux;
- $|m| = p + q - \text{PGCD}(p, q)$.

1. On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{pmatrix} \llbracket 0, p+q-1 \rrbracket & \rightarrow & \llbracket 0, p+q-1 \rrbracket \\ x & \mapsto & \begin{cases} x+p & \text{si } x < q \\ x-q & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que $f(\llbracket 0, q-1 \rrbracket) = \llbracket p, p+q-1 \rrbracket$ et que $f(\llbracket q, p+q-1 \rrbracket) = \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.
 - b) En déduire que f est une permutation de $\llbracket 0, p+q-1 \rrbracket$.
2. Soit j l'ordre de 0 pour cette permutation.
 - a) Justifier que $j \leq p+q$.

- b) Montrer qu'il existe a et b deux entiers tels que $j = a + b$ et $ap - bq = 0$.
 - c) En déduire que $j \geq p + q$.
3. Montrer que m est un mot constant.

Exercice 5

Soit m un mot et p et q deux de ses périodes non nulles. On ne suppose plus que p et q sont premiers entre eux, mais on suppose toujours que $|m| = p + q - \text{PGCD}(p, q)$. On note $d = \text{PGCD}(p, q)$.

On pose $m^{(i)} = m_i m_{i+d} m_{i+2d} m_{i+3d} \dots$ le sous-mot obtenu en sautant de d lettres en d lettres dans m à partir de la position i , pour $0 \leq i < d$.

1. Déterminer la longueur des $m^{(i)}$.
2. Montrer que p/d et q/d sont des périodes des $m^{(i)}$.
3. En déduire que m admet d comme période.

Exercice 6

Soit m un mot, et p et q deux de ses périodes non nulles, de PGCD d . On suppose finalement que $|m| \geq p + q - d$.

1. Montrer que $m_{[0, p+q-d-1]}$ (le préfixe de m de longueur $p + q - d$) admet d comme période.
2. En déduire que m admet d comme période.