

Langages réguliers unaires

Travail
02

Ceci est une proposition de correction. Il existe d'autres chemins pour arriver au même résultat.

L'objectif est d'étudier les langages réguliers dans le cas où $|\mathcal{A}| = 1$, et de montrer plus précisément le résultat suivant :

Théorème 1

Soit $\mathcal{A} = \{a\}$. Les langages réguliers sur $\mathcal{A}$ sont exactement les langages de la forme

$$\{a^n \mid n \in A\}$$

où A est une union finie de progressions arithmétiques.

Partie 1 : progressions arithmétiques

Une progression arithmétique est un ensemble de la forme $p + q\mathbb{N}$, où $p, q \geq 0$ sont des entiers. On notera PA l'ensemble des progressions arithmétiques, et $UFPA$ l'ensemble des unions finies de progressions arithmétiques.

Exercice 1

1. Montrer que $\emptyset \in UFPA$.
2. Montrer que $\{0\}$ et $\{1\} \in UFPA$.
3. Montrer que si $X, Y \in UFPA$, alors $X \cup Y \in UFPA$.

Solution.

1. $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} i\mathbb{Z}$, donc $\emptyset \in UFPA$.
2. $\{0\} = 0 + 0\mathbb{Z}$, $\{1\} = 1 + 0\mathbb{Z}$.
3. Soit X et $Y \in UFPA$: alors $X \cup Y$ est une union finie d'unions finies de progressions arithmétiques, donc c'est une union finie de progressions arithmétiques. Donc $X \cup Y \in UFPA$.

Exercice 2

Pour deux ensembles $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, on note $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ (on fera attention à ne pas confondre avec l'addition sur les langages réguliers).

1. Soient $X = p + q\mathbb{N}$ et $Y = r + s\mathbb{N}$ deux progressions arithmétiques.
 - a) Montrer que si $q = 0$, $X + Y \in PA$.
 - b) Montrer que si $q > 0$, on a :

$$p + q\mathbb{N} + r + s\mathbb{N} = \bigcup_{0 \leq i < q} ((p + r + is) + q\mathbb{N})$$

- c) En déduire que, dans tous les cas, $X + Y \in UFPA$.
2. Montrer que si $X, Y \in UFPA$, alors $X + Y \in UFPA$.

Solution.

1. a) On a $X + Y = p + r + s\mathbb{N}$, donc $X + Y \in PA$.
 b) On note $U = \bigcup_{0 \leq i < q} ((p + r + is) + q\mathbb{N})$: montrons que $p + q\mathbb{N} + r + s\mathbb{N} = U$.
 Soit $x \in p + q\mathbb{N} + r + s\mathbb{N}$. Alors $x = p + r + qJ + sK$ pour deux entiers J et K . Procédons à la division euclidienne de K par q : alors $K = Aq + B$, avec $0 \leq B < q$. Donc $x = p + r + qJ + s(Aq + B) = p + r + q(J + sA) + sB$, avec $0 \leq B < q$: donc $p + q\mathbb{N} + r + s\mathbb{N} \subseteq U$.
 Puis, pour tout $0 \leq i < q$, on a $p + r + is + q\mathbb{N} \subseteq p + q\mathbb{N} + r + s\mathbb{N}$; donc en prenant l'union de ces ensembles, $U \subseteq p + q\mathbb{N} + r + s\mathbb{N}$.
 c) Les deux questions précédentes font la disjonction sur la nullité de q : dans les deux cas, $X + Y$ est une union finie de progressions arithmétiques.
2. Soit $X = \bigcup_{i=0}^{n-1} (p_i + q_i\mathbb{N})$ et $Y = \bigcup_{j=0}^{m-1} (p'_j + q'_j\mathbb{N})$. Alors $X + Y = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{m-1} (p_i + q_i\mathbb{N} + p'_j + q'_j\mathbb{N})$: c'est une union finie de sommes de progressions arithmétiques. Par la question précédente, on a donc $X + Y \in UFPA$.

Exercice 3

Pour un ensemble $X \subseteq \mathbb{N}$, on note $E(X) = \{x_1 + x_2 + \dots + x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in X \text{ pour tout } i\}$.

1. Montrer que pour tout $X \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in E(X)$.
2. Soit $X = p + q\mathbb{N}$ une progression arithmétique.
 - a) Montrer que si $p = 0$, alors $E(X) \in PA$.
 - b) Montrer que si $p > 0$, on a :

$$E(X) = \{0\} \cup \bigcup_{0 \leq i < p} (p + iq + p\mathbb{N})$$

3. Montrer que pour $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, $E(X \cup Y) = E(X) + E(Y)$.
4. En déduire que si $X \in UFPA$, alors $E(X) \in UFPA$.

Solution.

1. Le cas $k = 0$ permet de trouver que $0 \in E(X)$.
2. a) Si $p = 0$, alors $X = q\mathbb{N}$, et $E(X) = q\mathbb{N} = X$, donc $E(X) \in PA$.
 b) Notons $E = \{0\} \cup \bigcup_{0 \leq i < p} (p + iq + p\mathbb{N})$. Montrons par double inclusion que $E = E(X)$.
 D'abord, $0 \in E(X)$, et pour tout $0 \leq i < p$, on a bien $p + iq + p\mathbb{N} \subseteq E(X)$; donc $E \subseteq E(X)$.
 Puis, soit $x \in E(X)$: alors $x = \sum_{i=1}^k p + qK_i$ pour des coefficients K_i .
 Si $k = 0$, alors $x = 0 \in E(X)$.
 Sinon, de manière générale, $x = kp + q \times \sum_{i=1}^k K_i$. Procédons à la division euclidienne de $\sum_{i=1}^k K_i$ par p : alors $\sum_{i=1}^k K_i = Ap + B$, avec $0 \leq B < p$. Donc $x = p + (k - 1)p + Apq + Bq = p + (k - 1 + Aq)p + Bq$, ce qui correspond à l'un des ensembles de l'union décrite par E . Donc $x \in E$.
3. Si $x \in E(X \cup Y)$, alors en séparant les termes venus de X de ceux venus de Y , on a $x = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{j=1}^m y_j$ où $x_i \in X$ et $y_j \in Y$. Donc $x \in E(X) + E(Y)$.

Si $x \in E(X) + E(Y)$, x est la somme d'un nombre fini d'éléments de X et de Y , donc $x \in E(X \cup Y)$.

4. Soit $X \in UFPA$: on écrit $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ où $X_i \in PA$. Alors, on a par récurrence à partir de la question précédente que $E(X) = \sum_{k=1}^n E(X_i)$. Comme $X_i \in PA$, on sait que $E(X_i) \in UFPA$; et l'exercice précédent nous permet d'en déduire par récurrence qu'une somme finie de UFPA est une UFPA, donc $E(X) \in UFPA$.

Partie 2 : retour aux langages réguliers

Exercice 4

Soit $Q \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ une famille de parties de $\mathbb{N}$: on suppose que Q contient $\emptyset$, $\{0\}$ et $\{1\}$, et que Q est stable par les opérateurs $\cup$, $+$ et E .

Montrer que $UFPA \subseteq Q$.

Solution.

Nous allons d'abord montrer que Q contient toutes les progressions arithmétiques.

D'abord, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p = 1 + 1 + \dots + 1$, donc $\{p\} = \{1\} + \{1\} + \dots + \{1\}$: Q contient $\{1\}$ et est stable par $+$, donc $\{p\} \in Q$. Ce résultat tient aussi si $p = 0$ (puisque $\{0\} \in Q$).

Ensuite, pour $q \in \mathbb{N}$, $E(\{q\}) = q\mathbb{N}$: donc, comme Q est stable par l'opérateur E , $q\mathbb{N} \in Q$.

Comme Q est stable par somme, pour tous $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p + q\mathbb{N} \in Q$: donc $PA \subseteq Q$.

Puis comme Q est stable par union, par récurrence, Q est stable par union finie : donc $UFPA \subseteq Q$.

Exercice 5

1. Montrer que la fonction $\phi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $m \mapsto |m|$ est un isomorphisme de monoïdes.
2. En déduire le théorème 1.

Solution.

1. Pour rappel, on suppose $\mathcal{A} = \{a\}$. Alors pour tout $m_1, m_2 \in (\mathcal{A}^*)^2$, on a $\phi(m_1 \cdot m_2) = |m_1 \cdot m_2| = |m_1| + |m_2| = \phi(m_1) + \phi(m_2)$. De plus, $\phi(\varepsilon) = 0$; donc ϕ est bien un morphisme de monoïde.

Comme $\mathcal{A} = \{a\}$, on remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi^{-1}(\{k\}) = \{a^k\}$, donc ϕ injectif; et $\phi(a^k) = k$, donc ϕ surjectif.

2. Considérons $Q = \{\phi(L) \mid L \in \text{Rat}(\mathcal{A}^*)\} = \{\{\phi(m) \mid m \in L\} \mid L \in \text{Rat}(\mathcal{A}^*)\}$. Alors Q contient $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et est stable par les opérateurs $\cup$, $+$ et E : en effet, $\phi(L \cdot L') = \phi(L) + \phi(L')$, $\phi(L + L') = \phi(L) \cup \phi(L')$ et $\phi(L^*) = E(\phi(L))$. Donc, d'après l'exercice 4, $UFPA \subseteq Q$.

Réciproquement, on montre que $Q \subseteq UFPA$: plus précisément, on montre que $\text{Rat}(\mathcal{A}^*) \subseteq \phi^{-1}(UFPA) = \{\phi^{-1}(X) \mid X \in UFPA\}$. En effet, $\phi^{-1}(UFPA)$ contient $\emptyset$, $\{a\}$ et est stable par union, concaténation et étoile de Kleene. On applique ensuite ϕ pour obtenir $Q \subseteq UFPA$.

Donc pour tout $L \in \text{Rat}(\mathcal{A}^*)$, $\phi(L) \in UFPA$; et pour tout $X \in UFPA$, $\phi^{-1}(X) \in \text{Rat}(\mathcal{A}^*)$: c'est le théorème 1.

Exercice 6

1. Soit L un langage régulier sur un alphabet quelconque. Montrer que $|L| = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in L, |m| = n\} \in UFPA$.
2. En déduire que $L_R = \{a^{[n\sqrt{n}]} \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un langage régulier.

Solution.

1. On pose $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \{a\}$, qui envoie toute lettre de $\mathcal{A}$ vers une unique lettre a , et on l'étend sur $\mathcal{A}^*$ comme morphisme.

Alors pour tout langage rationnel $L \in \text{Rat}(\mathcal{A}^*)$, $|L| = \phi(\psi(L))$.

Méthode pas encore vue en cours : ψ est un morphisme, donc $\psi(L) \in \text{Rat}(\{a\}^*)$, donc $|L| \in UFPA$.

Méthode à faire pour le moment : on montre par induction sur L que $\psi(L) \in \text{Rat}(\{a\}^*)$, donc $|L| \in UFPA$.

2. Supposons par l'absurde que L_R soit régulier : alors $|L_R|$ serait une union finie de progressions arithmétiques.

On sait que $|L_R|$ est infini : donc parmi ces progressions arithmétiques, l'une d'entre elles doit être de la forme $p + q\mathbb{N}$ avec $q \neq 0$. On en déduit alors qu'il existe des couples d'éléments de $|L_R|$ arbitrairement grands qui sont éloignés d'exactly q . Seulement, $\{\lfloor n\sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'a pas cette propriété : les éléments consécutifs de cet ensemble s'éloignent de plus en plus les uns des autres.

Preuve formelle de ce fait :

$$(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n} \geq (n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n} \geq \sqrt{n}$$

donc

$$\lfloor (n+1)\sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor n\sqrt{n} \rfloor \geq (n+1)\sqrt{n+1} - 1 - n\sqrt{n} \geq \sqrt{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Donc $|L_R|$ ne contient pas de progression arithmétique infinie. Absurde!

Donc L_R n'est pas régulier.