# Mots sans carré et mots sans cube (2019)

Sujet
∗

*Remarque :* initialement, ce sujet a été construit pour être fait en 1h avec aide d'un examinateur. Il a été adapté pour le format actuel de l'épreuve en 30 minutes de préparation + 30 minutes de passage.

Dans ce sujet, les lettres d'un mot de longueur $n$ sur un alphabet $\Sigma$ seront notées $w[0], \ldots, w[n-1]$. Un mot non-vide $u$ est un *carré* s'il existe $v \in \Sigma^*$ tel que $u = v \cdot v$, et c'est un *cube* s'il existe $v \in \Sigma^*$ tel que $u = v \cdot v \cdot v$, où $\cdot$ dénote la concaténation.
Un mot $w \in \Sigma^*$ est *sans carré* si aucun de ses facteurs n'est un carré, et les mots sans cube sont définis de manière analogue. L'objet de ce sujet est de construire des mots sans carré et sans cube de longueur arbitrairement grande.

### Question 1

Si l'alphabet $\Sigma$ a une seule lettre, quelle est la plus grande longueur possible pour un mot sans carré ? pour un mot sans cube ?

### Question 2

Si l'alphabet $\Sigma$ a deux lettres, quelle est la plus grande longueur possible pour un mot sans carré ?

Jusqu'à la question 6, on considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. On définit la fonction $h : \Sigma \to \Sigma^*$ par $h(a) = ab$ et $h(b) = ba$, et on l'étend à une fonction de $\Sigma^*$ dans $\Sigma^*$ de la façon suivante : pour $w = w[0] \cdots w[n-1]$ un mot de $\Sigma^*$, on note $h(w) := h(w[0]) \cdots h(w[n-1])$. En particulier, pour $\varepsilon$ le mot vide, on a $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

### Question 3

Soit $w \in \Sigma^*$. On cherche à montrer que $h(w)$ ne peut pas contenir de facteur qui soit un cube de longueur impaire. On raisonne par l'absurde : on suppose que $h(w)$ admet un facteur $c^3$ de longueur impaire.

1. Montrer que $c^3$ ne peut pas être un préfixe de $h(w)$.
2. Conclure.

### Question 4

Démontrer que pour tout mot $w \in \Sigma^*$, si $h(w)$ contient un facteur de longueur paire qui est un cube, alors $w$ contient un facteur qui est un cube.

### Question 5

Montrer que $(h^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ définit une famille de mots sans cube arbitrairement longs sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

### Question 6

Un *pré-cube* est un mot de la forme $v \cdot v \cdot v[0]$ où $v \in \Sigma^*$ est non vide. Un mot est *sans pré-cube* si aucun de ses facteurs n'est un pré-cube. Montrer que $(h^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ définit une famille de mots sans pré-cube arbitrairement longs sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
*On pourra dinstinguer les cas où $v$ est de longueur impaire ou paire.*

### Question 7

Montrer qu'il existe des mots sans carré arbitrairement longs sur un alphabet de taille 4.

### Question 8

Montrer qu'il existe des mots sans carré arbitrairement longs sur un alphabet de taille 3.

---

**ZONE BONUS.**

*Remarque :* **il n'est pas attendu que vous prépariez les questions suivantes**. Elles sont la suite présente dans le sujet original, et sont présentes au cas où vous ayez été extrêmement rapide ou pour vous entraîner.

### Question 9

Un *mot infini* sur l'alphabet $\Sigma$ est une séquence infinie $w[0] \dots w[n] \dots$ d'éléments de $\Sigma$. On dit qu'il est sans carré si aucun de ses facteurs finis n'est un carré, c'est-à-dire que pour tous $i < j$ dans $N$, le mot $w[i] \dots w[j-1]$ n'est pas un carré.
Existe-t-il des mots infinis sans cube sur un alphabet de taille 2 ? des mots infinis sans carré sur un alphabet de taille 3 ?

### Question 10

On construit une suite de mots en posant $w_0 := a$ et $w_{i+1} = h(w_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, où $h$ est défini juste avant la question 2. Écrire le pseudo-code d'un algorithme qui, étant donné $n \in \mathbb{N}$, calcule $w_n$. Quelle est sa complexité en temps et en espace ?

### Question 11

Proposer une autre définition, par récurrence, de la suite $(w_i)$ et écrire le pseudo-code d'un algorithme plus efficace pour calculer $w_i$ étant donné $i$.