

Graphes transitivement orientables (2024)

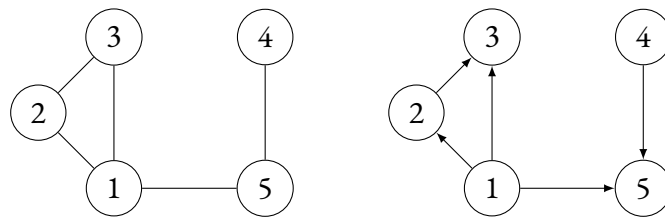
Sujet
*

Ordre partiel. On rappelle qu'un ordre partiel est une relation transitive, réflexive et antisymétrique.

Graphes. Un graphe $G = (V, E)$ est composé d'un ensemble de sommets $V \neq \emptyset$ et d'un ensemble d'arêtes E . Si G est orienté, $E \subseteq \{(v, w) \mid v \neq w \in V\}$. Si G est non-orienté, $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v \neq w \in V\}$. Dans tout ce sujet, on considère des graphes orientés tels que $(v, w) \in E \implies (w, v) \notin E$.

Orientation. Une *orientation* d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est un graphe orienté obtenu en choisissant une orientation pour chaque arête de G . Formellement, $G' = (V, E')$ est une orientation de G si $E = \{\{v, w\} \mid (v, w) \in E' \vee (w, v) \in E'\}$.

Graphe transitivement orientable. Un graphe orienté $G = (V, E)$ est *transitif* si $(v_1, v_2) \in E$ et $(v_2, v_3) \in E$ implique $(v_1, v_3) \in E$. Un graphe non-orienté est *transitivement orientable* s'il existe une orientation transitive du graphe (c'est-à-dire une orientation qui est un graphe transitif).



Le graphe de gauche est transitivement orientable. Le graphe de droite en est une orientation transitive.

Question 1

Donner un ensemble infini de graphes transitivement orientables.

Question 2

- Soit \leq un ordre partiel sur un ensemble V et $E = \{\{v, w\} \subseteq V \mid ((v \leq w) \vee (w \leq v)) \wedge (v \neq w)\}$. Montrer que le graphe (V, E) est transitivement orientable.
- Réciproquement, tout graphe transitivement orientable peut-il être obtenu de cette manière à partir d'un ordre partiel?

Arêtes ouvertes. Pour un graphe non-orienté $G = (V, E)$ donné, on dit qu'une paire d'arêtes $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$ est *ouverte*, noté $\{v_1, v_2\} \smile \{v_2, v_3\}$, si $\{v_1, v_2\} \in E$ et $\{v_2, v_3\} \in E$ mais $\{v_1, v_3\} \notin E$. On autorise $v_1 = v_3$, donc \smile est réflexive. (À l'oral, on pourra lire $a \smile b$ comme « a smile b », car le symbole ressemble à un sourire).

Relation \smile^* . Pour $\{v, w\} \in E$ et $\{v', w'\} \in E$, on écrit $\{v, w\} \smile^* \{v', w'\}$ s'il existe $k \geq 1$ arêtes $\{v_1, w_1\}, \dots, \{v_k, w_k\}$ telles que $\{v_1, w_1\} = \{v, w\}$, $\{v_k, w_k\} = \{v', w'\}$ et pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $\{v_i, w_i\} \smile \{v_{i+1}, w_{i+1}\}$. Notons que \smile^* est une relation d'équivalence (on ne demande pas de le vérifier).

Question 3

Montrer que si G contient une suite $(v_i)_{1 \leq i \leq k}$ de sommets tels que

$$\{v_1, v_2\} \smile \{v_2, v_3\} \smile \{v_3, v_4\} \smile \dots \smile \{v_{k-1}, v_k\} \smile \{v_k, v_1\} \smile \{v_1, v_2\}$$

avec $k > 1$ impair, alors G n'est pas transitivement orientable. En déduire un exemple de graphe qui n'est pas transitivement orientable.

Composition de graphes. Soit $V_0 = \{1, \dots, n\}$. Soit $G_0 = (V_0, E_0)$ un graphe orienté à n sommets, et soit n graphes orientés $G_i = (V_i, E_i)$, $1 \leq i \leq n$. La composition $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ est le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet i de G_0 par le graphe G_i et en ajoutant des arêtes depuis tous les sommets de G_i vers tous ceux de G_j si et seulement si $(i, j) \in E_0$. Formellement, $G = (V, E)$ où :

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_n$$

$$E = E_1 \cup \dots \cup E_n \cup \bigcup_{(i,j) \in E_0} V_i \times V_j$$

On définit de manière analogue la composition de graphes non-orientés.

Graphe décomposable. Un graphe $G = (V, E)$, orienté ou non, est dit *décomposable* s'il existe G_0, G_1, \dots, G_n avec $1 < n < |V|$ tels que $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$. Un graphe G est dit *indécomposable* s'il n'est pas décomposable.

Remarque. La condition $1 < n < |V|$ dans la définition de « décomposable » interdit les décompositions triviales.

Question 4

Montrer que si un graphe non-orienté G est indécomposable, alors il a une seule classe d'équivalence pour \sim^* .

Question 5

Montrer que si un graphe non-orienté $G = (V, E)$ avec $E \neq \emptyset$ est transitivement orientable, alors il est indécomposable si et seulement s'il existe exactement deux orientations transitives de G .

Graphe désorienté. Si $G = (V, E)$ est un graphe orienté, son graphe désorienté est le graphe non-orienté (V, E') où $E' = \{\{v, w\} \mid (v, w) \in E \vee (w, v) \in E\}$.

Dimension. La *dimension* d'un graphe orienté transitif $G = (V, E)$ est le plus petit entier d tel qu'il existe d graphes orientés transitifs $G_i = (V, E_i)$ dont le graphe désorienté est le graphe complet, et tels que $E = E_1 \cap \dots \cap E_d$.

Question 6

Montrer que tout graphe orienté transitif a une dimension finie.

Question 7

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté et $\overline{G} = (V, \overline{E})$ avec $\overline{E} = \{\{v, w\} \subseteq V \mid \{v, w\} \notin E\}$ son graphe complémentaire. Montrer que G admet une orientation transitive de dimension au plus 2 si et seulement si G et \overline{G} admettent tous les deux une orientation transitive.