

## Graphes transitivement orientables (2024)

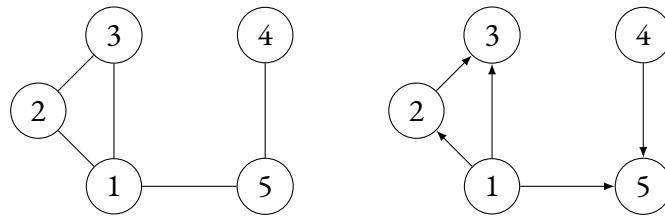
Corrigé  
\*

**Ordre partiel.** On rappelle qu'un ordre partiel est une relation transitive, réflexive et antisymétrique.

**Graphes.** Un graphe  $G = (V, E)$  est composé d'un ensemble de sommets  $V \neq \emptyset$  et d'un ensemble d'arêtes  $E$ . Si  $G$  est orienté,  $E \subseteq \{(v, w) \mid v \neq w \in V\}$ . Si  $G$  est non-orienté,  $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v \neq w \in V\}$ . Dans tout ce sujet, on considère des graphes orientés tels que  $(v, w) \in E \implies (w, v) \notin E$ .

**Orientation.** Une *orientation* d'un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  est un graphe orienté obtenu en choisissant une orientation pour chaque arête de  $G$ . Formellement,  $G' = (V, E')$  est une orientation de  $G$  si  $E = \{(v, w) \mid (v, w) \in E' \vee (w, v) \in E'\}$ .

**Graphe transitivement orientable.** Un graphe orienté  $G = (V, E)$  est *transitif* si  $(v_1, v_2) \in E$  et  $(v_2, v_3) \in E$  implique  $(v_1, v_3) \in E$ . Un graphe non-orienté est *transitivement orientable* s'il existe une orientation transitive du graphe (c'est-à-dire une orientation qui est un graphe transitif).



Le graphe de gauche est transitivement orientable. Le graphe de droite en est une orientation transitive.

**Question 1**

Donner un ensemble infini de graphes transitivement orientables.

*Solution.*

Un exemple simple est la famille des graphes complets  $K_n$  (on les suppose de sommets  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ). Alors on pose comme orientation  $KO_n = (\llbracket 0, n-1 \rrbracket, V_n)$  où  $(i, j) \in V_n \iff i < j$ .

Alors pour toute arête  $(i, j)$  de  $K_n$ , on a  $i < j$  ou  $j < i$  : donc toute arête de  $K_n$  a bien exactement une orientation, donc  $KO_n$  est bien une orientation de  $K_n$ .

De plus, si  $(i, j), (j, k) \in V_n$ , alors  $i < j$  et  $j < k$  donc  $i < k$  donc  $(i, k) \in V_n$  : donc  $KO_n$  est transitif.

On peut aussi considérer les graphes en étoile : un sommet central vers lequel tous les autres sont reliés. On oriente toutes les arêtes vers le sommet central.

**Question 2**

- Soit  $\leq$  un ordre partiel sur un ensemble  $V$  et  $E = \{\{v, w\} \subseteq V \mid ((v \leq w) \vee (w \leq v)) \wedge (v \neq w)\}$ . Montrer que le graphe  $(V, E)$  est transitivement orientable.
- Réciproquement, tout graphe transitivement orientable peut-il être obtenu de cette manière à partir d'un ordre partiel ?

*Solution.*

- On pose  $G = (V, \tilde{E})$  avec  $\tilde{E} = \{(v, w) \mid v \leq w \wedge v \neq w\}$ . Alors c'est bien une orientation de  $G$ , car toute paire d'éléments comparables aura une unique orientation (par antisymétrie); puis c'est transitif par transitivité de  $\leq$ .
- Soit  $G = (V, E)$  un graphe transitivement orientable et  $G' = (V, E')$  le graphe orienté transitif associé.

Alors on définit comme ordre sur  $V$  : «  $v \leq w \iff (v, w) \in E' \vee v = w$  ». Alors  $\leq$  est transitif et réflexive. Reste à montrer que  $\leq$  est antisymétrique. Supposons que  $v \leq w$  et  $w \leq v$ , et supposons absurdement que  $v \neq w$  : alors  $(v, w) \in E'$  et  $(w, v) \in E'$ , ce qui contredit nos exigences sur les orientations. Absurde! Donc  $v = w$  : c'est bien une relation d'ordre.

Donc tout graphe transitivement orientable peut être obtenu de cette manière.

**Arêtes ouvertes.** Pour un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  donné, on dit qu'une paire d'arêtes  $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$  est *ouverte*, noté  $\{v_1, v_2\} \smile \{v_2, v_3\}$ , si  $\{v_1, v_2\} \in E$  et  $\{v_2, v_3\} \in E$  mais  $\{v_1, v_3\} \notin E$ . On autorise  $v_1 = v_3$ , donc  $\smile$  est réflexive. (À l'oral, on pourra lire  $a \smile b$  comme «  $a$  smile  $b$  », car le symbole ressemble à un sourire).

**Relation  $\smile^*$ .** Pour  $\{v, w\} \in E$  et  $\{v', w'\} \in E$ , on écrit  $\{v, w\} \smile^* \{v', w'\}$  s'il existe  $k \geq 1$  arêtes  $\{v_1, w_1\}, \dots, \{v_k, w_k\}$  telles que  $\{v_1, w_1\} = \{v, w\}$ ,  $\{v_k, w_k\} = \{v', w'\}$  et pour tout  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $\{v_i, w_i\} \smile \{v_{i+1}, w_{i+1}\}$ . Notons que  $\smile^*$  est une relation d'équivalence (on ne demande pas de le vérifier).

### Question 3

Montrer que si  $G$  contient une suite  $(v_i)_{1 \leq i \leq k}$  de sommets tels que

$$\{v_1, v_2\} \smile \{v_2, v_3\} \smile \{v_3, v_4\} \smile \dots \smile \{v_{k-1}, v_k\} \smile \{v_k, v_1\} \smile \{v_1, v_2\}$$

avec  $k > 1$  impair, alors  $G$  n'est pas transitivement orientable. En déduire un exemple de graphe qui n'est pas transitivement orientable.

*Solution.*

Si on prend le temps de faire le dessin, on a un cycle de longueur impaire. Supposons que  $G$  soit transitivement orientable (avec  $G' = (V, E')$ ) : quitte à étudier le cas symétrique, on suppose  $(v_1, v_2) \in E'$ . Alors comme  $\{v_1, v_3\} \notin E$ , comme  $G'$  est transitif, on ne peut pas avoir  $(v_2, v_3) \in E'$ ; donc  $(v_3, v_2) \in E'$ . En continuant le raisonnement, on observe que notre orientation fait pointer les arêtes vers les sommets pairs. Seulement, que se passe-t-il pour l'arête  $\{v_k, v_1\}$ , dont les deux sommets sont impairs? Et bien il n'y a pas d'orientation valide. On remarque alors qu'aucun cycle de longueur impaire  $C_{2n+1}$  n'est transitivement orientable.

**Composition de graphes.** Soit  $V_0 = \{1, \dots, n\}$ . Soit  $G_0 = (V_0, E_0)$  un graphe orienté à  $n$  sommets, et soit  $n$  graphes orientés  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . La composition  $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$  est le graphe obtenu en remplaçant chaque sommet  $i$  de  $G_0$  par le graphe  $G_i$  et en ajoutant des arêtes depuis tous les sommets de  $G_i$  vers tous ceux de  $G_j$  si et seulement si  $(i, j) \in E_0$ . Formellement,  $G = (V, E)$  où :

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup \dots \cup V_n \\ E &= E_1 \cup \dots \cup E_n \cup \bigcup_{(i,j) \in E_0} V_i \times V_j \end{aligned}$$

On définit de manière analogue la composition de graphes non-orientés.

**Graphe décomposable.** Un graphe  $G = (V, E)$ , orienté ou non, est dit *décomposable* s'il existe  $G_0, G_1, \dots, G_n$  avec  $1 < n < |V|$  tels que  $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ . Un graphe  $G$  est dit *indécomposable* s'il n'est pas décomposable.

*Remarque.* La condition  $1 < n < |V|$  dans la définition de « décomposable » interdit les décompositions triviales.

### Question 4

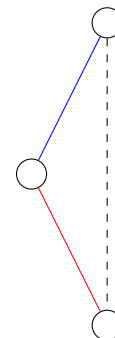
Montrer que si un graphe non-orienté  $G$  est indécomposable, alors il a une seule classe d'équivalence pour  $\smile^*$ .

**Remarque post-passage :** l'énoncé n'exige pas que les sommets de la décomposition soient distincts. Il est alors dans ce cas très simple de décomposer « non trivialement » (quasi) n'importe quel graphe : il suffit de prendre  $G_0$  le graphe à deux sommets sans arête, de poser  $G_1$  le graphe à 1 sommet (correspondant à un premier sommet de  $G$ ) et  $G_2 = G$ . Alors  $G = G_0[G_1, G_2]$ . Pour que la définition soit intéressante, il faut que les sommets des  $G_i$  soient disjoints, contrairement à ce que j'ai dit à l'oral : on propose une version plus correcte dans ce corrigé.

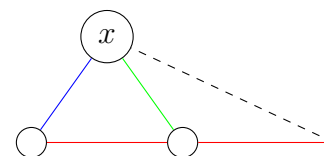
Montrons plutôt la contraposée : supposons que  $G = (V, E)$  admette plusieurs classes d'équivalence pour  $\sim^*$ . Si  $G$  n'est pas connexe, alors  $G$  est « trivialement » non-trivialement décomposable : il suffit de considérer chaque composante connexe comme un  $G_i$  et de considérer  $G_0$  comme le graphe sans arête.

On traite maintenant le cas où  $G$  est connexe. La décomposition triviale consiste à créer un  $G_i$  par sommet de  $G$ , et à relier comme on veut : on va faire à peine mieux en créant un  $G_i$  qui contiendra plusieurs sommets, et tous les autres seront à 1 sommet.

Si  $G$  est connexe, alors il existe un sommet de  $G$  qui est à l'interface entre au moins deux classes de  $\sim^*$ . Comme ces deux arêtes sont dans des classes différentes, elles ne sont pas reliées par  $\sim$  : donc le triangle se ferme. L'arête en plus peut être rouge ou bleue ou autre : dans tous les cas, l'une des couleurs rouge ou bleue est en unique exemplaire dans le triangle. Quitte à recolorer, on suppose que c'est le rouge.



On s'intéresse à la composante de  $\sim^*$  correspondant à l'arête rouge. Dans ce schéma, il est possible que le bleu et le vert représentent la même classe : il importe surtout que le rouge soit différent. Prenons une nouvelle arête rouge rattachée à la première : alors elle n'est pas dans la classe verte, donc le triangle se ferme. Donc le nouveau sommet atteint dans la composante rouge est aussi directement rattaché à  $x$ . Cette nouvelle arête n'est pas non plus rouge (car triangle) : donc on a formé un nouveau triangle de base rouge dont le sommet est  $x$ . En fait, on peut continuer ce processus tout le long de cette composante rouge : s'il existe un sommet  $x$  qui serait le sommet d'un triangle de base rouge, alors il est relié à tous les sommets de la composante rouge.



On propose alors la décomposition suivante :

- $G_1$  correspond à la composante rouge : les arêtes sont la composante rouge, et les sommets sont ceux extrémités d'une arête rouge.
- pour  $i \geq 2$ , on pose  $G_i$  un graphe à un sommet et aucune arête, chaque  $G_i$  correspondant à un sommet non extrémité d'une arête rouge. Remarquons que  $x$  est au moins un tel sommet, donc il y a au moins un tel  $G_i$ . On suppose que  $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$ .
- $G_0 = (V_0, E_0)$  avec  $V_0 = \llbracket 1, k \rrbracket$  et :

$$E_0 = \{(i, j) \mid i, j \geq 2 \text{ et } \{i, j\} \in E\} \\ \cup \{(1, j) \mid \text{la classe rouge est la base d'un triangle de sommet } j\}$$

Alors  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ ; si  $\{x, y\} \in E$  n'a aucune extrémité dans la composante rouge, alors l'arête est créée par  $V_x \times V_y$  avec  $x, y \geq 2$  et  $\{x, y\} \in E$ ; si  $\{x, y\}$  est rouge, alors elle est dans  $E_1$ ; si  $\{x, y\}$  a exactement une extrémité ( $y$ ) dans la composante rouge mais n'est pas elle-même rouge, alors on a un triangle de sommet  $x$  et de base rouge : par ce qu'on a dit précédemment,  $x$  est relié à tous les sommets de la composante rouge, donc  $V_1 \times V_y$  est bien dans  $E$ .

## Question 5

Montrer que si un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  avec  $E \neq \emptyset$  est transitivement orientable, alors il est indécomposable si et seulement s'il existe exactement deux orientations transitives de  $G$ .

*Solution.*

Soit  $G = (V, E)$  transitivement orientable.

$\implies$  : supposons  $G$  indécomposable, alors par la question précédente, il y a une seule classe pour  $\sim^*$ . Soit  $\{x, y\} \in E$  : on se propose de construire une orientation  $GO$  de  $G$  telle que  $(x, y) \in E(GO)$ . Montrons alors que cela est possible, et force l'orientation de toutes les autres arêtes. En effet, soit une arête  $e$  telle que  $\{x, y\} \sim e$ ; quitte à faire le cas symétrique,  $e = \{y, z\}$ . Alors l'orientation  $(y, z)$  est interdite (car sinon, on aurait  $(x, y), (y, z)$ , donc on aurait besoin de  $(x, z)$  qui n'existe pas car  $\{x, y\} \sim \{y, z\}$ ); aussi, l'orientation  $(z, y)$  est cohérente (sinon, on aurait  $(y, w)$  et on vient de dire qu'on s'interdisait ce genre d'arête). On peut continuer cette construction d'arête en arête; on aura bien une orientation. Remarquons qu'on a fait un choix au début : on aurait pu considérer l'orientation  $(y, x)$ . Comme toute orientation doit orienter  $\{x, y\}$ ,  $G$  admet exactement 2 orientations transitives.

$\impliedby$  : Supposons que  $G$  soit décomposable; alors chaque  $G_i$  est indécomposable, donc orientable de 2 façons. On considère alors pour chaque  $G_i$  une orientation transitive  $GO_i$ . On montre alors qu'il est possible de construire une orientation  $GO$  de  $G$  qui respecte chaque orientation. Soit  $i, j \in E_0$  et  $GO_i$  et  $GO_j$  les orientations associées ( $i < j$ ). Alors on fixe (arbitrairement) l'orientation des arêtes de  $GO_i$  vers  $GO_j$  de  $i$  vers  $j$ . Alors ça ne crée pas de conflit. Donc  $G$  admet au moins autant d'orientations que le produit des nombres d'orientations des différents  $G_i$ ; donc au moins 4.

**Graphe désorienté.** Si  $G = (V, E)$  est un graphe orienté, son graphe désorienté est le graphe non-orienté  $(V, E')$  où  $E' = \{\{v, w\} \mid (v, w) \in E \vee (w, v) \in E\}$ .

**Dimension.** La dimension d'un graphe orienté transitif  $G = (V, E)$  est le plus petit entier  $d$  tel qu'il existe  $d$  graphes orientés transitifs  $G_i = (V, E_i)$  dont le graphe désorienté est le graphe complet, et tels que  $E = E_1 \cap \dots \cap E_d$ .

## Question 6

Montrer que tout graphe orienté transitif a une dimension finie.

*Solution.*

Soit  $G$  un graphe orienté transitif. Considérons l'ensemble  $Ext$  des graphes orientés transitifs dont le désorienté est le graphe complet et qui sont des extensions de  $G$ .

Montrons que  $Ext$  est non vide : posons  $G_0 = (V, E')$  tel que  $E' = E \cup \{(i, j) \mid (i, j) \notin E \wedge (j, i) \notin E\}$ . Alors  $G_0$  a pour désorienté le graphe complet; reste à montrer que  $G_0$  est transitif. Ça se fait en montrant que si  $(i, j), (j, k)$  sont dans  $E'$ , alors  $(i, k) \in E'$  (par une disjonction de cas pénible).

Donc  $Ext$  est non vide : donc  $G \subseteq \bigcap_{G' \in Ext} G' = G_\cap$ .

Considérons alors  $G_\cap$  le graphe obtenu à l'intersection : alors pour tout  $\{i, j\}$  non orienté par  $G$ , on construit deux  $G'$  dans  $Ext$  qui orientent différemment  $\{i, j\}$ . Comme  $G_\cap$  est l'intersection, youpi.

Évidemment,  $Ext$  est fini, donc la dimension est finie.

## Question 7

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté et  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  avec  $\bar{E} = \{\{v, w\} \subseteq V \mid \{v, w\} \notin E\}$  son graphe complémentaire. Montrer que  $G$  admet une orientation transitive de dimension au plus 2 si et seulement si  $G$  et  $\bar{G}$  admettent tous les deux une orientation transitive.

*Solution.*

Si vous lisez ce corrigé : je n'ai pas le temps de résoudre cette question. Si vous avez une solution (même partielle, l'un des deux sens), n'hésitez pas à me la communiquer.

---