Déclasser dans les douze chemins (2025)

Sujet
*

On étudie, compte et range des classes d'équivalence de fonctions d'un ensemble fini N à n éléments dans un ensemble fini X à x éléments. On s'intéresse à quatre relations d'équivalence pour les fonctions :

— l'égalité, notée DD ;
— l'égalité à permutation des éléments de N près, notée UD ;
— l'égalité à permutation des éléments de X près, notée DU ;
— l'égalité à permutation des éléments de N et de X près, notée UU.

Lorsqu'on a une égalité à permutation près sur un ensemble, on peut considérer que les éléments de cet ensemble sont « indistinguables » (**U***ndistinguishable*) pour la comparaison des fonctions, ce qui explique les notations U et D.
En outre, on s'intéresse à trois caractéristiques des fonctions qu'on étudie :

— les fonctions *arbitraires* (notées A) ;
— les fonctions *injectives* (notées I) ;
— les fonctions *surjectives* (notées S).

Cela définit 12 (3×4) problèmes de dénombrement, appelés *douze chemins* (*twelvefold way*), ou *douze problèmes de Gian-Carlo Rota*. Par exemple, le problème IDU consiste à dénombrer et décrire les classes d'équivalence de fonctions injectives à permutation de X près.
Quand $j \in \mathbb{N}$, on pourra utiliser $[\![1, j]\!]$ pour désigner $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant j\}$.

Question 1

Dénombrer les classes des problèmes suivants :

1. ADD
2. IDD
3. IUU
4. SUD

Question 2

Pourquoi la caractéristique *bijective* n'est-elle pas étudiée ?

Question 3

Les problèmes des douze chemins admettent chacun au moins une représentation naturelle de leurs classes d'équivalence et un *ordre lexicographique* sur ces représentations.
Donner de telles représentations et ordres pour les problèmes de la question 1.

Un *algorithme de déclassement* pour un problème des douze chemins est un algorithme qui prend en entrée un entier i et renvoie en sortie une représentation de la classe d'équivalence située à la $i + 1$-ème place selon l'ordre lexicographique associée à ce problème.

Question 4

Donner des algorithmes de déclassement pour les problèmes de la question 1.

Dans la suite, on s'intéresse uniquement au problème SDU.

Question 5

Donner une relation de récurrence décrivant le dénombrement des fonctions de SDU.

Soit A et B deux ensembles d'entiers naturels, on définit $A \preceq B = (\min A \leqslant \min B)$. On notera $A \backslash B$ pour $\{x \in A \mid x \notin B\}$. On définit enfin :

$$A \lhd B = \begin{cases} & A = B \\ \text{ou} & A \subset B \text{ et } \max A < \min(B \backslash A) \\ \text{ou} & B \subset A \text{ et } \min(A \backslash B) < \max B \\ \text{ou} & \min(A \backslash B) < \min(B \backslash A) \end{cases}$$

Question 6

Donner une représentation des classes de SDU, puis un ordre total sur ces classes.

Question 7

Donner les 10 premières fonctions, pour cet ordre, de SDU avec $n = 5$ et $x = 3$.

Question 8

Donner un algorithme de déclassement pour SDU.