Bisimulation dans CCS (2023)

Corrigé
*

Le langage CCS (*Calculus of Communication Systems*) est un langage de description de processsus concurrents. On s'intéresse d'abord à une version simplifiée du langage, dont la syntaxe, construire à partir d'un ensemble infini d'*actions* a, b, c ... est donnée par :

$$\begin{array}{lll} P, Q & ::= & 0 \mid P \,||\, Q \mid \alpha.P \mid P + Q \\ \alpha & ::= & a \mid \overline{a} \end{array}$$

0 est le processus inactif; $P \,||\, Q$ est la composition parallèle des processus P et Q; $a.P$ (respectivement $\overline{a}.P$) est le processus qui effectue l'action a (respectivement le dual de l'action a) puis se comporte comme P; $P + Q$ est le choix non-déterministe entre P et Q.
Une relation de *congruence structurelle* $\equiv$ permet d'identifier des processus qui s'écrivent différemment mais représentent le même objet :

- $P \,||\, Q \equiv Q \,||\, P$ et $P \,||\, (Q \,||\, R) \equiv (P \,||\, Q) \,||\, R$ et $0 \,||\, P \equiv P$;
- $P + Q \equiv Q + P$ et $P + (Q + R) \equiv (P + Q) + R$ et $0 + P \equiv P$;
- si $P \equiv P'$, alors $\alpha.P \equiv \alpha.P'$;
- si $P \equiv P'$ et $Q \equiv Q'$, alors $P \,||\, Q \equiv P' \,||\, Q'$ et $P + Q \equiv P' + Q'$;
- $\equiv$ est réflexive, symétrique et transitive.

Dans la suite, on considérera les processus « modulo $\equiv$ », c'est-à-dire qu'on manipulera des classes d'équivalence de processus pour $\equiv$.
Une *étiquette* ℓ est soit une action (ou une action duale) α soit une *synchronisation* τ. La sémantique de CCS (la manière dont les processus évoluent) est donnée par la relation de *transition étiquetée* suivante :

- $\alpha.P \to^{\alpha} P$ (l'action α est jouée);
- $a.P \,||\, \overline{a}.Q \to^{\tau} P \,||\, Q$ (l'action a et l'action duale $\overline{a}$ se synchronisent);
- si $P \to^{\ell} P'$, alors $P \,||\, Q \to^{\ell} P' \,||\, Q$;
- si $P \to^{\ell} P'$, alors $P + Q \to^{\ell} P'$;
- si $P \to^{\ell} P'$ et $P \equiv Q$ et $P' \equiv Q'$, alors $Q \to^{\ell} Q'$.

On omettra les occurrences de 0 en fin de processus, par exemple on écrira $a.b$ plutôt que $a.b.0$. On considérera que le préfixe . est prioritaire sur la somme $+$ qui est prioritaire sur la composition parallèle $||$: ainsi, $a.b + c \,||\, d$ est $((a.b) + c) \,||\, d$.
Un *graphe de transition de* P est une représentation des processus accessibles depuis P par transitions successives sous forme de graphe où :

- les sommets sont les classes d'équivalence pour $\equiv$ de processus différents;
- les arêtes des transitions étiquetées entre les processus.

À titre d'exemple, le graphe de transition du processus $a.\overline{b} \,||\, \overline{a}$ est donnée dans la figure 1. On constate, entre autres, que $a.\overline{b} \,||\, \overline{a}$ peut effectuer trois transitions :

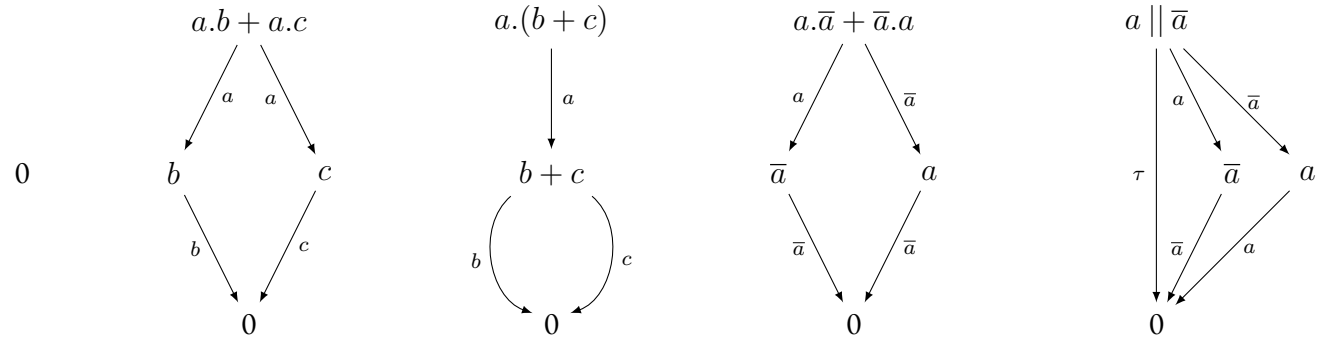
- $a.\overline{b} \,||\, \overline{a} \to^{a} \overline{b} \,||\, \overline{a}$ (on a joué l'action a);
- $a.\overline{b} \,||\, \overline{a} \to^{\overline{a}} a.\overline{b} \,||\, 0$ (on a joué l'action duale $\overline{a}$);
- $a.\overline{b} \,||\, \overline{a} \to^{\tau} \overline{b} \,||\, 0$ (on a synchronisé a et $\overline{a}$).

Question 1

Donner les graphes de transition des cinq processus suivants :

$$(1)\quad 0 \qquad (2)\quad a.b + a.c \qquad (3)\quad a.(b + c) \qquad (4)\quad a.\overline{a} + \overline{a}.a \qquad (5)\quad a \,||\, \overline{a}$$

Solution.



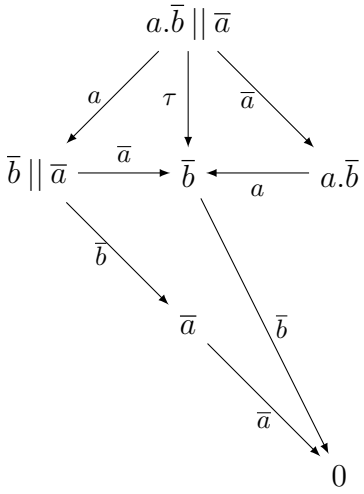


Figure 1.

Question 2

Montrer qu'un graphe de transition d'un processus est fini.

Solution.

On ignore pour le moment le quotientage par la relation $\equiv$, et on conclut quand même.
On définit la taille d'un processus récursivement : $t(0) = 0$, $t(\alpha) = 1$ pour toute action ou sa duale, $t(P \,||\, Q) = t(P + Q) = 1 + t(P) + t(Q)$. Par induction, on montre alors que pour tous processus P et P' telles qu'il existe ℓ vérifiant $P \to^{\ell} P'$, alors $t(P') < t(P)$: ça se fait par induction sur les 4 premières règles.
Remarquons aussi que « l'alphabet » (c'est-à-dire le nombre d'actions différentes dans un processus) ne croît jamais ; donc on peut définir l'alphabet d'un processus.
Soit P le processus initial de taille n. Alors le graphe (en ignorant le quotientage) ne contient que des processus de taille $\leqslant n$ sur l'alphabet de P : il y en a un nombre fini.
Après quotientage, on ne fera que fusionner des sommets, donc le graphe de transition a un nombre fini de sommets, donc est fini.
Remarquons que l'argument sur la décroissance stricte de la taille implique que le graphe est acyclique.

On ajoute la récursion à la syntaxe du langage : $P, Q \;::=\; [...] \mid X \mid \mu X.P$ avec X appartenant à un ensemble infini de *variables de récursion*, avec la règle de congruence structurelle suivante :

$$\mu X.P \equiv P[\mu X.P/X]$$

où $P[Q/X]$ est le processus obtenu en remplaçant dans P chaque occurrence de X par le processus Q. En outre,

si $P \equiv P'$, alors $\mu X.P \equiv \mu X.P'$.

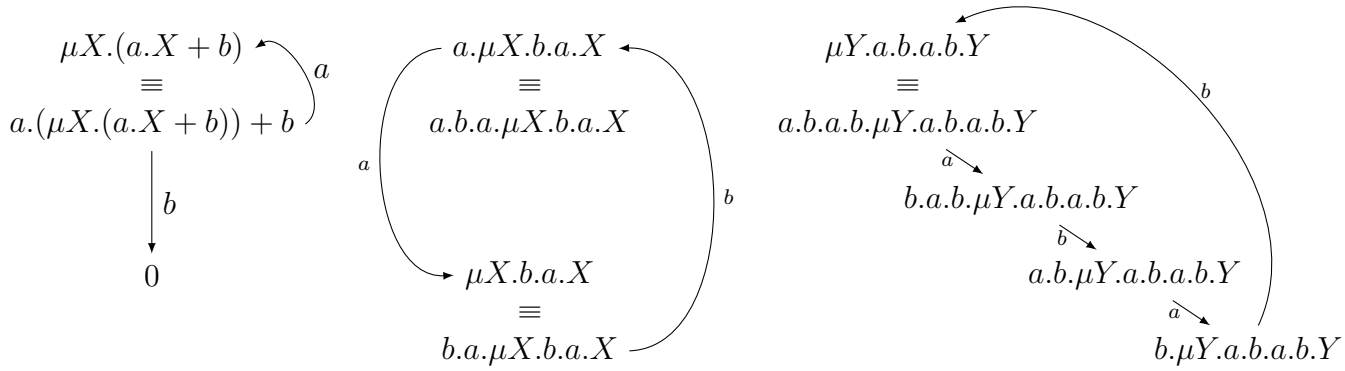
Par exemple, on a $\mu X.a.X \equiv a.\mu X.a.X \equiv a.a.\mu X.a.X \equiv \ldots$

Question 3

Donner le graphe de transition des processus suivants :

$$(1) \quad \mu X.(a.X + b) \qquad (2) \quad a.\mu X.b.a.X \qquad (3) \quad \mu Y.a.b.a.b.Y$$

Solution.



Question 4

Montrer qu'un graphe de transition peut être infini.

Solution.

Considérons le processus $P = \mu X.(aX \mid\mid bX) \equiv a.\mu X.(a.X \mid\mid b.X) \mid\mid b.\mu X.(a.X \mid\mid b.X)$: remarquons que si on procède à une nouvelle substitution, elle ne fera que rajouter des parallélisations **internes**, et aucune externe. On exploite cela : en partant de ce processus et en jouant a, on obtient $\mu X.(a.X \,||\, b.X) \,||\, b.\mu X.(a.X \,||\, b.X) \equiv a.\mu X.(a.X \,||\, b.X) \,||\, b.\mu X.(a.X \,||\, b.X) \,||\, b.\mu X.(a.X \,||\, b.X)$: on a fait apparaître une nouvelle parallélisation externe ! Donc en particulier, ce nouveau processus n'est pas équivalent au premier. En continuant ainsi arbitrairement longtemps, on trouve des processus avec un nombre arbitrairement grand de parallélisations externes ; ils sont tous distincts et ne sont pas identifiés par la relation $\equiv$. Donc le graphe de transition associé est bien infini.

Un ensemble E et une relation d'ordre $\leqslant$ sur E forment un *treillis complet* $(E, \leqslant)$ quand toute partie $S \subseteq E$ admet une borne inférieure et une borne supérieure pour $\leqslant$.

Soit f croissante sur un treillis complet $(E, \leqslant)$.

Question 5

Montrer que si x est un point pré-fixe de f, c'est-à-dire si $x \leqslant f(x)$, alors $f(x)$ en est aussi un.

Solution.

f croissante + $x \leqslant f(x) \implies f(x) \leqslant f(f(x))$ donc $f(x)$ est un point pré-fixe.

Question 6

Montrer que la borne supérieure des points pré-fixes de f est le plus grand point fixe de f.

Solution.

Soit PF l'ensemble des points pré-fixes, et notons $a = \sup PF$. Remarquons alors que pour tout $x \in PF$, $x \leqslant a$; par croissance de f, $x \leqslant f(x) \leqslant f(a)$. Donc $f(a)$ est aussi un majorant de PF, et a en est le plus petit, donc $a \leqslant f(a)$. Donc $a \in PF$; donc par la question précédente, $f(a) \in PF$. Comme a majore PF, $f(a) \leqslant a$: donc $a = f(a)$.
Soit b un point fixe, alors b est aussi un point pré-fixe, donc majoré par a.

Question 7

Montrer le lemme de Knaster-Tarski :

> Toute fonction f croissante sur un treillis complet admet un plus petit et un plus grand point fixe.

Solution.

On vient de montrer que f admet un plus grand point fixe. Le même raisonnement sur les points post-fixes prouve que f admet aussi un plus petit point fixe.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des processus de CCS et $\mathcal{L}$ l'ensemble des étiquettes. Une relation $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ est une *bisimulation* si pour tout couple $(P, Q) \in \mathcal{R}$:

— pour tout $(\ell, P') \in \mathcal{L} \times \mathcal{P}$, si $P \to^{\ell} P'$, alors il existe $Q' \in \mathcal{P}$ tel que $Q \to^{\ell} Q'$ et $(P', Q') \in \mathcal{R}$.

— pour tout $(\ell, Q') \in \mathcal{L} \times \mathcal{P}$, si $Q \to^{\ell} Q'$, alors il existe $P' \in \mathcal{P}$ tel que $P \to^{\ell} P'$ et $(P', Q') \in \mathcal{R}$.

La bisimilarité (notée $\sim$) est la plus grande bisimulation (pour l'inclusion).

La définition de la bisimilarité n'est pas inductive : elle est récursive, mais ne contient pas de cas de base (on dit qu'elle est *coinductive*).

Question 8

Montrer que la bisimilarité peut être formellement définie, de manière unique, par le théorème de Knaster-Tarski.

Solution.

On pose comme ensemble $E = \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ et comme ordre $\leqslant$ l'inclusion. Alors $(E, \leqslant)$ est bien un treillis complet (la borne sup est l'union, la borne inf l'intersection).
On définit ensuite la fonction $f : E \to E$ suivante :

$$f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \{(P, Q) \mid \text{si } P \to^{\ell} P', \exists Q' \text{ tq } Q \to^{\ell} Q' \wedge (P', Q') \in \mathcal{R} \\ \text{et si } Q \to^{\ell} Q', \exists P' \text{ tq } P \to^{\ell} P' \wedge (P', Q') \in \mathcal{R}\}$$

Alors f est croissante ; de plus, si $\mathcal{R}$ est une bisimulation, alors elle sera un point fixe de f. Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est un point fixe de f, alors $\mathcal{R}$ est une bisimulation ; donc en définissant la bisimilarité comme le plus grand point fixe de f, c'est bien la plus grande bisimulation.
C'est un peu étrange, car ce n'est pas constructif : la bisimilarité n'est pas une limite d'une suite $(f^n(\mathcal{R}_0))_{n \geqslant 0}$; toutes les bisimulations sont des points fixes de f, et réciproquement. Knaster-Tarski nous affirme que f admet un plus grand point fixe, donc la bisimilarité existe ; mais il ne nous explique pas comment l'obtenir.

Question 9

Montrer que les processsus (2) et (3) de la question 3 sont *bisimilaires*, c'est-à-dire qu'ils appartiennent (en tant que couple de processus) à la bisimilarité.

Solution.

La bisimilarité est la plus grande bisimulation : si on en trouve une qui fonctionne, ça fonctionnera pour $\sim$. On propose une relation très très simple :

$$a.\mu X.b.a.X \sim \mu Y.a.a.b.Y \sim a.b.\mu Y.a.b.a.Y$$

$$\mu X.b.a.X \sim b.a.b.\mu Y.a.a.b.Y \sim b.\mu Y.a.b.a.b.Y$$

et c'est tout. Alors ça marche : cela revient à dire que pour tout sommet du graphe de gauche, on peut lui associer un sommet du graphe de droite, et si on se contente d'avancer selon a et b, on ne saurait distinguer si on est dans le premier graphe ou le second.

Question 10

Montrer que les processus (2) et (3) de la question 1 ne sont pas bisimilaires.

Solution.

Supposons que les processus $a.b + a.c$ et $a.(b + c)$ soient bisimilaires : alors on aurait que $b \sim b + c \sim c$ (car $a.b + a.c \to^a b$ et $a.(b + c) \to^a b + c$, donc $b \sim b + c$, et pareil avec c); mais pourtant, depuis b, il n'existe pas de processus P tel que $b \to^c P$, tandis qu'il en existe un depuis c. Absurde !